Conjeturas Estándar sobre Ciclos Algebraicos

Por A. Grothendieck

1. Introducción. Enunciamos dos conjeturas sobre ciclos algebraicos, que surgieron de un intento de entender las conjeturas de Weil sobre las funciones Z de variedades algebraicas. Estas conjeturas en realidad no son nuevas, y fueron formuladas hace unos tres años independentemente por Bombieri y por mí.

La primera es una afirmación de existencia para ciclos algebraicos (considerablemente más débil que las conjeturas de Tate), que está inspirada y es formalmente análoga al teorema de estructura de Lefschetz sobre la cohomología de una variedad proyectiva lisa sobre el cuerpo complejo.

La segunda es un enunciado de positividad, que generaliza el bien conocido teorema de positividad de Weil en la teoría de variedades abelianas. Es formalmente análogo a las famosas desigualdades de Hodge, y de hecho es consecuencia de ellas en característica cero.

¿Qué queda por probar de las conjeturas de Weil? Antes de enunciar nuestras conjeturas, recordemos lo que falta por demostrar al respecto de las conjeturas de Weil, cuando se abordan por medio de la cohomología ℓ-ádica.

Sean $X/\mathbb{F}_q$ una variedad proyectiva lisa irreducible de dimensión n sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos, y ℓ un número primo distinto de la característica. M. Artin y yo hemos probado que la función Z de X se puede expresar como

$$Z(t) = \frac{L'(t)}{L(t)},$$

$$L(t) = \frac{L_0(t)L_2(t)\dots L_{2n}(t)}{L_1(t)L_3(t)\dots L_{2n-1}(t)},$$

$$L_i(t) = \frac{1}{P_i(t)},$$

donde $P_i(t) = t^{\dim H^i(\overline{X})}Q_i(t^{-1})$, siendo Q_i el polinomio característico del endomorfismo de Frobenius de X actuando sobre $H^i(\overline{X})$ (aquí H^i simboliza el i-ésimo grupo de cohomología ℓ-ádica y $\overline{X}$ se deduce de X extendiendo el cuerpo base al cierre algebraico de $\mathbb{F}_q$). Pero hasta ahora no se ha demostrado que

(a) los $P_i(t)$ tienen coeficientes enteros, independientes de ℓ ($\neq$ car $\mathbb{F}$);
(b) los valores propios del endomorfismo de Frobenius en $H^i(\overline{X})$, esto es, los recíprocos de las raíces de $P_i(t)$, tienen valor absoluto $q^{i/2}$.

Nuestra primera conjetura aborda la cuestión (a). La primera y la segunda juntas implicarían, por una idea debida esencialmente a Serre [**4**], la cuestión (b).

2. Una forma débil de la conjetura 1. En lo que sigue, trabajaremos con variedades sobre un cuerpo base k algebraicamente cerrado y de característica cualquiera. Entonces (a) conduce a la siguiente cuestión: Si f es un endomorfismo de una variedad X/k y $\ell \neq \mathrm{car} k$, f induce

$$f^i : H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X, \mathbb{Q}_\ell),$$

y cada uno de estos f^i tiene un polinomio característico. *¿Son los coeficientes de estos polinomios números enteros independientes de ℓ?* Cuando X es lisa y completa de dimensión n, la misma cuestión tiene sentido al sustituir f por un ciclo de dimensión n en $X \times X$, considerado como una correspondencia algebraica.

En característica cero, esto se ve utilizando cohomología entera. Si car > 0, parece obvio que esto es así, pero no se ha demostrado todavía.

Fijemos para simplificar un isomorfismo

$$k^*{}_{\ell^\infty} \cong \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \qquad \text{(¡herejía!)}.$$

Entonces tenemos una aplicación

$$\mathrm{cl} : \mathcal{L}^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to H^{2i}_\ell(X)$$

que asocia a un ciclo algebraico su clase de cohomología. Denotamos su imagen por $C^i_\ell(X)$, y nos referimos a sus elementos como *clases algebraicas de cohomología.*

Un resultado conocido, debido a Dwork-Faton, muestra que para la cuestión de integralidad (por no hablar de la independencia del polinomio característico de ℓ), basta probar que

$$\mathrm{Tr}(f^i)^N \in \frac{1}{m}\mathbb{Z} \quad \text{para cada } N \geq 0.$$

donde m es un entero positivo fijo[1]. Ahora bien, la gráfica Γ_{f^N} en $X \times X$ de f^N define una clase de cohomología en $X \times X$, y si escribimos la clase de cohomología Δ de la diagonal en $X \times X$ como

$$\Delta = \sum_{i=0}^{n} \pi_i$$

donde las π_i son las proyecciones de Δ sobre $H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)$ para la descomposición canónica $H^n(X \times X) \cong \sum_{i=0}^n H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)$, un cálculo conocido muestra que

$$\mathrm{Tr}(f^N)_{H^i} = (-1)^i \mathrm{cl}(\Gamma_{f^N})\pi_i \in H^{4n}(X \times X) \approx \mathbb{Q}_\ell.$$

Asumimos que las π_i son algebraicas. Entonces $\pi_i = \frac{1}{m}\mathrm{cl}(\Pi_i)$, siendo Π_i un ciclo algebraico, por lo que

[1]Esto me fue señalado por S. Kleimann.

$$\mathrm{Tr}(f^N)_{H^i} = (-1)^i(\Pi_i \cdot \Gamma_{f^N}) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}$$

y hemos acabado.

Forma débil de la Conjetura 1. ($C(X)$): Los elementos π_i^ℓ son algebraicos, (y proceden de un elemento de $\mathcal{L}^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, que no depende de ℓ).

N. B. 1. El enunciado entre paréntesis es necesario para la independencia de P_i en ℓ.
2. Si se cumplen $C(X)$ y $C(Y)$, entonces se cumple $C(X \times Y)$, y más generalmente, las componentes de Künneth de cualquier clase algebraica de cohomología en $X \times Y$ son algebraicas.

3. La conjetura 1 (tipo Lefschetz). Sean X lisa y proyectiva, y $\xi \in H^2(X)$ la clase de una sección hiperplana. Entonces tenemos un morfismo

$$\cup\, \xi^{n-i} : H^i(X) \to H^{2n-i}(X) \quad (i \leq n). \tag{0.1}$$

Se cree (y ha sido establecido por Lefschetz [**2**], [**5**] sobre el cuerpo complejo por métodos trascendentes) que esto es un isomorfismo para cualquier característica. Para $i = 2j$, tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{2j}(X) & \xrightarrow{\xi^{n-2j}} & H^{2n-2j}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ C^j(X) & \longrightarrow & C^{n-j}(X) \end{array}$$

Nuestra conjetura es: ($A(X)$):

(a) (0.1) siempre es un isomorfismo (la forma débil);
(b) si $i = 2j$, (0.1) induce un isomorfismo (o equivalentemente, un epimorfismo) $C^j(X) \to C^{n-j}(X)$.

N. B. Si asumimos que $C^j(X)$ es de dimensión finita, entonces (b) es equivalente a que $\dim C^{n-j}(X) \leq \dim C^j(X)$ (lo que en particular implica la igualdad de estas dimensiones por (a)).

Una formulación equivalente a la conjetura de arriba (para toda variedad X como antes) es la siguiente.

($B(X)$): La operación Λ (véase [**5**]) de la teoría de Hodge es algebraica.

Con esto, queremos decir que hay una clase de cohomología λ en $H^*(X \times X)$ tal que la aplicación $\Lambda : H^*(X) \to H^*(X)$ se obtiene levantando una clase de X a $X \times X$ por la primera proyección, haciendo el producto cup por λ y tomando su imagen en $H^*(X)$ por el morfismo de Gysin asociado a la segunda proyección.

Observamos que $B(X) \Rightarrow A(X)$, ya que la algebraicidad de Λ implica la de Λ^{n-i}, y Λ^{n-i} proporciona una inversa a $\cup\xi^{n-i} : H^i(X) \to H^{2n-i}(X)$. Por otro lado, es fácil ver que $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$, y esto prueba la equivalencia de las conjeturas A y B.

La conjetura parece más abordable en la forma B. Observamos que $B(X)$ es estable bajo productos, secciones hiperplanas y especializaciones. En particular, como se cumple para el espacio proyectivo, también se cumple para variedades lisas que son intersecciones completas en algún espacio proyectivo. (Como consecuencia, ¡deducimos para estas variedades el deseado teorema de integralidad para la función Z!). También se cumple para las Grassmannianas, y para variedades abelianas (Liebermann [**3**]).

Tengo una idea para una posible aproximación a la Conjetura B, que depende a su vez de ciertas cuestiones geométricas no resueltas, y que deberían acabar siendo establecidas en cualquier caso.

Finalmente, tenemos la implicación $B(X) \Rightarrow C(X)$ (primera parte), ya que los π_i se pueden expresar como polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de Λ y $L = \cup\xi$. Para obtener la totalidad de $C(X)$, deberíamos asumir además que hay un elemento de $\mathcal{L}(X \times X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ que da Λ para cada ℓ.

4. Conjetura 2 (tipo Hodge). Para cada $i \leq n$, sea $P^i(X)$ la 'parte primitiva' de $H^i(X)$, esto es, el núcleo de $\cup\xi^{n-i+1} : H^i(X) \to H^{2n-i+2}(X)$, y pongamos $C^j_{Pr}(X) = P^{2j} \cap C^j(X)$. En $C^j_{Pr}(X)$ tenemos una forma bilineal simétrica $\mathbb{Q}$-valuada dada por

$$(x, y) \to (-1)^j K(x \cdot y \cdot \xi^{n-2j})$$

donde K representa el isomorfismo $H^{2n}(X) \cong \mathbb{Q}_\ell$. Nuestra conjetura dice entonces que

($Hdg(X)$): *La forma de arriba es definida positiva.*

Es fácil reducirla al caso en que $\dim X = 2m$ es par y $j = m$.

OBSERVACIONES. (1) En característica cero, se sigue directamente de la teoría de Hodge [**5**].

(2) $B(X)$ y $Hdg(X \times X)$ implican, por ciertos argumentos de Weil y Serre, lo siguiente: si f es un endomorfismo de X tal que $f^*(\xi) = q \cdot \xi$ para algún $q \in \mathbb{Q}$ (que es necesariamente > 0), entonces los valores propios de $f_{H^i(X)}$ son enteros algebraicos de valor absoluto $q^{i/2}$. Por tanto, esto implica todas las conjeturas de Weil.

(3) La conjetura $Hdg(X)$ junto con la $A(X)(a)$ (la conjetura de Lefschetz en cohomología) implican que la equivalencia numérica de ciclos es lo mismo que la equivalencia cohomológica para cualquier cohomología ℓ-ádica si y solo si se cumple $A(X)$. Así pues, vemos que en característica 0, la conjetura $A(X)$ es equivalente a la bien conocida conjetura sobre la igualdad entre la equivalencia cohomológica y la equivalencia numérica.

(4) A la vista de (3), $B(X)$ y $Hdg(X)$ implican que la equivalencia numérica de ciclos coincide con la equivalencia $\mathbb{Q}_\ell$ para cada ℓ. Más aún, la aplicación natural

$$Z^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^i_\ell(X)$$

es un monomorfismo, y en particular tenemos

$$\dim_{\mathbb{Q}} C^i(X) \leq \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_\ell(X).$$

Observamos que para deducir esto no se usa la positividad de la forma considerada en $Hdg(X)$, sino solo que no es degenerada.

Otra consecuencia de $Hdg(X)$ y $B(X)$ es que la forma más fuerte de $B(X)$ se cumple, porque Λ viene de un ciclo algebraico con coeficientes racionales *independientes* de ℓ.

Conclusiones. Una demostración de las dos conjeturas estándar daría resultados considerablemente más profundos que las conjeturas de Weil. Formarían la base de la llamada "teoría de motivos", que es una teoría sistemática de las "propiedades aritméticas" de las variedades algebraicas, encarnadas en sus grupos de clases de ciclos bajo equivalencia numérica. Hoy por hoy solo tenemos una parte muy pequeña de esta teoría en dimensión uno, contenida en la teoría de variedades abelianas.

Junto con el problema de resolución de singularidades, probar las conjeturas estándar es a mi juicio la tarea más importante de la geometría algebraica.

Bibliografía

[1] S. Kleimann: *Exposé dada en el IHES., Bures, 1967.*
[2] S. Lefschetz: *El Análisis situs y la geometría algebraica,* Gauthier-Villars, París, 1924.
[3] D. I. Lieberman: *Variedades de Picard Superiores.* (Por publicar.)
[4] J.-P. Serre: *Análogos Kählerianos a ciertas conjeturas de Weil, Ann. of Math. 71 (1960).*
[5] A. Weil: *Variedades Kählerianas,* Hermann, París, 1968.

IHES, Bures
Francia.